Глава 3

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

3.1. Геометрия

Треугольники

1. Два треугольника равны, если

$a = a_1, \quad b = b_1, \quad \gamma = \gamma_1;$

$c = c_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1;$

$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$

2. Два треугольника подобны, если

$\alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1;$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}, \quad \gamma = \gamma_1;$$

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

3. Теорема косинусов:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma;$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta;$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$

4. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

5. Площадь треугольника:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R} = pr.$$

6. Высота h_a, медиана m_a и биссектриса l_a, проведенные к стороне a, вычисляются по формулам:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$l_a = \frac{\sqrt{bc\left[(b+c)^2 - a^2\right]}}{b+c}$$

(заменой a на b или a на c и соответственно b на a или c на a получаются формулы для h_b, h_c, m_b, m_c, l_b, l_c).

Обозначения: a, b. c — стороны треугольника; α, β, γ — углы, им противолежащие; $p = 0{,}5(a + b + c)$; r, R — радиусы вписанной и описанной около треугольника окружности.

Четырехугольники

7. Параллелограмм

Связь между диагоналями и сторонами, площадь:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right);$$

$$S = ah_a = ab\sin\alpha .$$

8. Ромб

Связь между диагоналями и сторонами, площадь:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2; \quad d_1 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}, \quad d_2 = 2a\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2 .$$

9. Прямоугольник

Связь между диагоналями и сторонами, площадь:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad S = ab \cdot$$

10. Квадрат

Связь между диагоналями и сторонами, площадь:

$$d = a\sqrt{2}, \quad S = a^2 \cdot$$

11. Трапеция
Площадь

$$S = 0,5(a+b)h_a = mh_a, \quad m = 0,5(a+b) \text{ — средняя линия,}$$

$$S = 0,5d_1d_2\sin\alpha .$$

12. Произвольный выпуклый четырехугольник
Площадь

$$S = 0,5d_1d_2\sin\varphi .$$

Обозначения: d_1, d_2 — диагонали; φ — угол между ними; α — угол между смежными сторонами четырехугольника; h_a — высота, опущенная на сторону a.

Многоугольники

13. Для правильного многоугольника (n — сторон)

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \text{ — центральный угол;}$$

$$\beta = \frac{360^\circ}{n} \text{ — внешний угол;}$$

$$\gamma = 180^\circ - \beta \text{ — внутренний угол.}$$

14. Сторона

$$a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} .$$

15. Площадь

$$S = 0,5nar = nr^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0,5nR^2\sin\alpha = 0,25na^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

где r, R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружности.

Окружность

16. Длина окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R .$$

17. Площадь круга радиуса R:

$$S = \pi R^2 .$$

18. Длина дуги

$$l_A = \frac{\pi R A}{180} = \alpha_{A^\circ} \cdot R .$$

19. Переход от градусной к радианной мере угла (и наоборот)

$$\alpha_{A^\circ} = \frac{\pi A}{180}, \quad A^\circ = \frac{\alpha_{A^\circ} \cdot 180^\circ}{\pi} .$$

20. Площадь сектора

$$S = \frac{\pi R^2 A}{360} = 0,5 l_A \cdot R .$$

21. Площадь сегмента

$$S_1 = 0,5R^2\left(\frac{\pi A}{180} - \sin A\right) = 0,5\left[l_A \cdot R - a(R-h)\right].$$

22. Условие возможности вписания окружности в выпуклый четырехугольник:

$a + c = b + d$, тогда $ac + bd = d_1 d_2$;

$$S_n = 0,5P_n \cdot r .$$

23. Условие возможности описания окружности около выпуклого четырехугольника:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ .$$

Обозначения: d_1, d_2 — диагонали, a, c и b, d — попарно противолежащие стороны четырехугольника; α, γ и β, δ — попарно противолежащие углы четырехугольника; A° — градусная мера угла, α_{A° — радианная мера угла, h — стрела сегмента; a — хорда; S_n — площадь, P_n — периметр многоугольника, описанного около окружности радиуса r.

Площади поверхностей многогранников

24. Призма

$S_{бок} = P_c l, \quad S_n = P_c l + 2S$ — наклонная;

$S_{бок} = Ph, \quad S_n = Ph + 2S$ — прямая.

25. Прямоугольный параллелепипед

$$S_{бок} = 2(a+b)c, \quad S_n = 2(ab+ac+bc).$$

26. Правильная пирамида

$S_{бок} = 0,5PH, \quad S_п = S_{бок} + S$.

27. Правильная усеченная пирамида

$S_{бок} = 0,5(P + P_1) \cdot H; \quad S_п = S_{бок} + S + S_1$.

Объемы многогранников

28. Призма

$V = S_c l = Sh$ — наклонная,

$V = Sh$ — прямая.

29. Прямоугольный параллелепипед

$V = abc$.

30. Правильная и неправильная пирамида

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

31. Правильная и неправильная усеченная пирамида

$$V = \frac{1}{3}\left(S + \sqrt{S \cdot S_1} + S_1\right) \cdot h.$$

Обозначения: P_c, P — периметры перпендикулярного сечения и основания; $S_{бок}$, $S_п$, S, S_c, S_1 — площади боковой поверхности, полной поверхности, основания и перпендикулярного сечения, верхнего основания; a, b, c — измерения прямоугольного параллелепипеда; h — высота; H — апофема правильной и правильной усеченной пирамиды; l — длина ребра наклонной призмы.

Площади поверхностей круглых тел

32. Цилиндр

$S_{бок} = 2\pi Rh;$

$S_п = S_{бок} + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R)$.

33. Конус

$S_{бок} = \pi Rl;$

$S_п = S_{бок} + \pi R^2 = \pi R(l + R)$.

34. Усеченный конус

$$S_{бок} = \pi(R + r)l;$$

$$S_п = S_{бок} + \pi(r^2 + R^2) = \pi\left[(R + r)l + r^2 + R^2\right].$$

35. Шар

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2 \cdot$$

36. Шаровой сегмент

$$S_{бок} = 2\pi R \cdot h_1.$$

Объемы круглых тел

37. Цилиндр

$$V = \pi R^2 h \cdot$$

38. Конус

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

39. Усеченный конус

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 + r^2 + Rr\right) \cdot h.$$

40. Шар

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

41. Шаровой сегмент

$$V = \pi h_1^2\left(R - \frac{h_1}{3}\right).$$

42. Шаровой слой

$$V = \frac{1}{3}\pi h_1\left(3r_1^2 + 3r_2^2 + h_1^2\right).$$

43. Шаровой сектор

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h_1.$$

Обозначения: R — радиус шара и основания цилиндра и конуса; r — радиус верхнего основания усеченного конуса; r_1, r_2 — радиусы оснований шарового слоя; l — образующая конуса и усеченного конуса; h — высота; D — диаметр шара; h_1 — высота шарового сегмента и шарового слоя.

3.2. Тригонометрия

Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

2. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2}(1+2n).$

3. $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0.$

4. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x \neq 0, \quad x \neq n\pi.$

5. $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0.$

6. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} n.$

Таблица значений тригонометрических функций одного и того же угла

№ п/п	Через функции	sinx	cosx	tgx	ctgx
7	sinx =	sinx	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\dfrac{\pm\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
8	cosx =	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cosx	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\dfrac{\pm\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
9	tgx =	$\dfrac{\pm\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tgx	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
10	ctgx =	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\dfrac{\pm\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$	ctgx

Таблица знаков и некоторых значений тригонометрических функций

№ п/п	Функции	Четверти				I					II	III	IV
		I	II	III	IV	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
11	sinx	+	+	–	–	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
12	cosx	+	–	–	+	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
13	tgx	+	–	+	–	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
14	ctgx	+	–	+	–	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Тригонометрические функции суммы и разности двух углов

15. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$.

16. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.

17. $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}x \pm \mathrm{tg}y}{1 \mp \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y}$.

18. $\mathrm{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{ctg}x\,\mathrm{ctg}y \mp 1}{\mathrm{ctg}y \pm \mathrm{ctg}x}$.

Тригонометрические функции двойного и тройного углов

19. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

20. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$.

21. $\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$.

22. $\operatorname{ctg}2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg}x}$.

23. $\sin 3x = \sin x\left(3 - 4\sin^2 x\right)$.

24. $\cos 3x = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right)$.

25. $\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x \cdot \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 3}{3\operatorname{tg}^2 x - 1}$.

26. $\operatorname{ctg}3x = \operatorname{ctg}x \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 3}{\operatorname{ctg}^2 x - 1}$.

Формулы понижения степени

27. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

28. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$.

29. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1 - \sin 2x}{2}$.

30. $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1 + \sin 2x}{2}$.

Тригонометрические функции половинного угла

31. $\sin\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$.

32. $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$.

33. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$.

34. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \dfrac{1 + \cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$.

Сумма и разность тригонометрических функций

35. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

36. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

37. $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

38. $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

39. $\mathrm{tg}x \pm \mathrm{tg}y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$.

40. $\mathrm{ctg}x \pm \mathrm{ctg}y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$.

41. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - 45^{\circ}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + 45^{\circ}\right)$.

42. $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(45^{\circ} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + 45^{\circ}\right)$.

Произведение тригонометрических функций

43. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$.

44. $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

45. $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \cos(x+y)\right]$.

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла

46. $\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$.

47. $\cos x = \dfrac{1 - tg^2 \dfrac{x}{2}}{1 + tg^2 \dfrac{x}{2}}$.

48. $tgx = \dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1 - tg^2 \dfrac{x}{2}}$.

49. $ctgx = \dfrac{1 - tg^2 \dfrac{x}{2}}{2tg\dfrac{x}{2}}$.

Простейшие тригонометрические уравнения

50. $\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \quad |a| \le 1, \quad n \in Z$.

51. $\cos x = b, \quad x = \pm \arccos b + 2n\pi, \quad |b| \le 1$.

52. $tgx = c, \quad x = arctgc + n\pi, \quad c \in R$.

53. $ctgx = d, \quad x = arcctgd + n\pi, \quad d \in R$.

54. $\sin x = 0, \quad x = n\pi$.

55. $\sin x = 1, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$.

56. $\sin x = -1, \quad x = -\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$.

57. $\cos x = 0, \quad x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$.

58. $\cos x = 1, \quad x = 2n\pi$.

59. $\cos x = -1, \quad x = \pi + 2n\pi$.

60. $tgx = 0, \quad x = n\pi; \quad tgx = \pm 1, \quad x = \pm \dfrac{\pi}{4} + n\pi$.

61. $\mathrm{ctg}x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi;\quad \mathrm{ctg}x = 1,\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi;\quad \mathrm{ctg}x = -1,\ x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$.

Обратные тригонометрические функции

62. $y = \arcsin x,\quad |x| \le 1,\quad -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2};$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\quad \sin(\arcsin x) = x$.

63. $y = \arccos x,\quad |x| \le 1,\quad 0 \le \arccos x \le \pi;$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\quad \cos(\arccos x) = x$.

64. $y = \mathrm{arctg}x,\quad -\infty < x < \infty,\quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg}x < \frac{\pi}{2};$

$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x,\quad \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x) = x$.

65. $y = \mathrm{arcctg}x,\quad -\infty < x < \infty,\quad 0 < \mathrm{arcctg}x < \pi;$

$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x,\quad \mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x) = x$.

66. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\quad |x| \le 1$.

67. $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \frac{\pi}{2},\quad -\infty < x < \infty$.

Периодичность тригонометрических функций

68. $\sin(x + n \cdot 2\pi) = \sin x,\quad T = 2\pi n,\quad n \in Z,$

T — период, $T = 2\pi$ — наименьший период.

69. $\cos(x + n \cdot 2\pi) = \cos x,\quad T = 2\pi n$.

70. $\mathrm{tg}(x + n \cdot \pi) = \mathrm{tg}x,\quad T = \pi n,$ $T = \pi$ — наименьший период.

71. $\mathrm{ctg}(x + n \cdot \pi) = \mathrm{ctg}x,\quad T = \pi n,$ $T = \pi$ — наименьший период.

72. $y = f(x),\quad f(x + T) = f(x),$ T — период;

$y = f(ax),\quad T_1 = \frac{T}{a}$ — период ($a > 0$).

Таблица формул приведения

№ п/п	x	90°−x	90°+x	180°−x	180°+x	270°−x	270°+x	360°−x	360°+x
73	sinx	cosx	cosx	sinx	−sinx	−cosx	−cosx	−sinx	sinx
74	cosx	sinx	−sinx	−cosx	−cosx	−sinx	sinx	cosx	cosx
75	tgx	ctgx	−ctgx	−tgx	tgx	ctgx	−ctgx	−tgx	tgx
76	ctgx	tgx	−tgx	−ctgx	ctgx	tgx	−tgx	−ctgx	ctgx