Глава 1
ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

При решении задач необходимо использовать различные факты теории: определения, теоремы, формулы (основные формулы приведены в 3.1).

Большая роль в правильном решении задач по планиметрии отводится чертежу. Он должен соответствовать данным задачи, стать наглядным воплощением записи условий задачи, подсказать правильный метод решения. При этом необходимо, чтобы при наличии нескольких различных углов в условии задачи и нескольких отрезков различной величины это различие было отражено на чертеже.

Изображения даются в параллельной проекции: изображения параллельных прямых — параллельные линии, изображения перпендикулярных, как правило неперпендикулярные прямые. Равные по величине отрезки, отложенные на одной прямой или параллельных прямых, остаются равными и на изображении (хотя длина их, как правило, меняется), если равные отрезки отложены на непараллельных прямых, они могут изображаться неравными отрезками.

Прямоугольники и параллелограммы изображаются на чертеже одинаково — в виде параллелограммов: для того, чтобы подчеркнуть острый угол, его необходимо отличать буквой на чертеже (α, β и т.д.).

При нахождении углов или отрезков следует рассматривать те фигуры (чаще всего треугольники), куда они входят (или их достраивать).

1.1. Решенные задачи

Задача 1. Найти наименьший катет прямоугольного треугольника, в котором точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 1), в котором отражаем, что один из отрезков гипотенузы больше второго более чем в 2 раза: $AP = 12$, $PB = 5$, гипотенуза $AB = AP + PB = 17$.

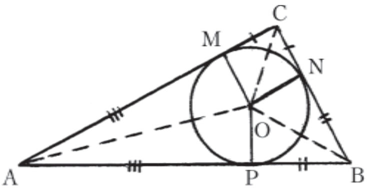

Рис. 1

2. Опираясь на свойство касательных, проведенных к окружности из т. A, B, C имеем: AM = AP, BP = =BN, CM = CN = r тогда катеты AC = =AM + r = 12 + r, BC = BN + r = 5 + r, где r — радиус вписанного круга.

3. По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow (12 + 5)^2 = (12 + r)^2 + (5 + r)^2$.

Решив квадратное уравнение $r^2 + 17r - 60 = 0$, получим r = 3. Тогда длина наименьшего катета BC: 8.

$\boxed{8}$

Задача 2. Хорда окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой конец — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 2) AB = 10, AC = 12.

Так как ∠1 = ∠2 (как внутренние накрест лежащие углы) и ∠1 измеряется половиной ∪AB, а ∠2 — половиной ∪BC, отсюда следует, что ∠A = ∠1 = ∠2. Следовательно, ΔABC равнобедренный и AB = BC = 10.

2. По теореме синусов (формула 4 в 3.1)

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

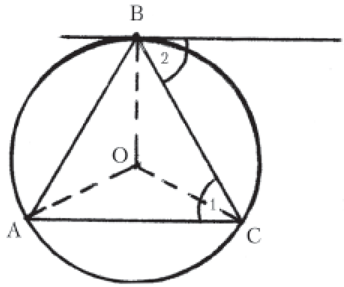

Рис. 2

Если найти sinB — задача будет решена.
3. Сделаем это по теореме косинусов (формула 3 в 3.1).

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B \Leftrightarrow 144 = 2 \cdot 100 - 2 \cdot 100\cos B \cdot$$

Откуда $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (0,28)^2} = 0,96$.

Окончательно: $2R = \dfrac{12}{0,96} = 12,5 \Leftrightarrow R = 6,25$.

$\boxed{6,25}$

Задача 3. Найти сторону ромба, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, если радиус r вписанной в него окружности равен $\sqrt{3}$.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 3). Из условия задачи

$\angle A = \angle C = 60^\circ, \quad AB = AD = BD,$

$AO = OC = AB \cdot \sin 60^\circ = AB\frac{\sqrt{3}}{2},$

$NM = 2r = 2\sqrt{3}.$

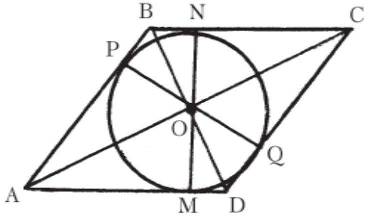

Рис. 3

2. $SABCD = NM \cdot AD =$

$= 2\sqrt{3} \cdot AD = \frac{AC}{2} \cdot BD = OC \cdot BD.$

$AD = 4.$

$\boxed{4}$

Задача 4. Один из острых углов трапеции 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10, а одно из оснований 8.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 4). Из условия задачи имеем

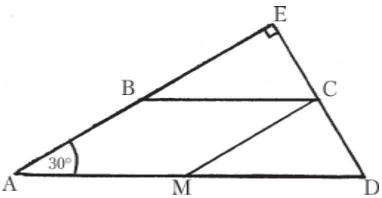

Рис. 4

$AED = 90^\circ$, $BC + AD = 20$, $BC = 8$, $\angle BAD = 30^\circ$.

2. Тогда $AD = 20 - 8 = 12$. Проводим из т. C прямую CM, параллельную AB, тогда ABCM — параллелограмм и $BC = AM = 8$, $MD = 12 - 8 = 4$.

3. ΔMCD — прямоугольный, $\angle CMD = 30^\circ$,

откуда $CD = MD \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$

$\boxed{2}$

Задача 5. Найти наименьшую сторону прямоугольного треугольника, если радиус окружности описанной около него, равен 15, а радиус вписанной в него окружности, равен 6.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 5). Гипотенуза $AB = 2R = 2 \cdot 15 = 30$.

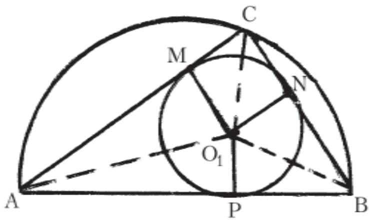

Рис. 5

2. Учитывая, что AM = AP = 30 – PB, NB = PB, MC = NC = MO_1 = NO_1 = r = = PO_1 = 6, по теореме Пифагора получим: $AB^2 = AC^2 + CB^2$ или $30^2 = (30 - - PB + 6)^2 + (PB + 6)^2$.

Решив квадратное уравнение: $PB^2 - 30PB + 216 = 0$, получим PB_1 = = 12, PB_2 = 18, откуда BC = 18 или BC = = 24, AC = 30 – 12 + 6 = 24 или AC = = 30 – 18 + 6 = 18. Наименьшая сторона равна 18.

$\boxed{18}$

Задача 6. В круговой сектор с центральным углом 60° вписан круг. Найти радиус вписанного круга, если радиус данного круга равен 15.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 6). Радиус данного круга OA = OB = OK = 15, радиус вписанного круга $MO_1 = PO_1 = KO_1$ = = r, ∠AOB = 60° = 2∠KOP.

2. Из ΔOO_1P:

$$\frac{r}{OO_1} = \sin 30^{\circ} \Leftrightarrow r = OO_1 \cdot 0{,}5,$$

$$OK = OO_1 + r \Leftrightarrow r = 15 - 2r \Leftrightarrow$$

$$3r = 15 \Leftrightarrow r = 5.$$

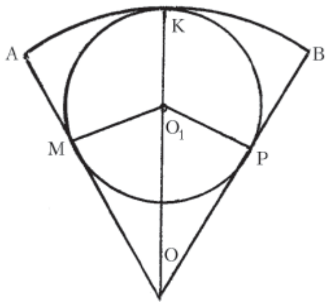

Рис. 6

$\boxed{5}$

Задача 7. Найти длину боковой стороны равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° и биссектрисой угла при основании равной $\sqrt{20}$ (ответ записать десятичной дробью с двумя знаками после запятой $\sqrt{5} \approx 2{,}24$).

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 7). $AD = \sqrt{20}$ — биссектриса, ∠A = (180° – 36°) : 2 = 72° = ∠C, ∠B = 36°, ∠BAD = ∠CAD = 0,5 · 72° = 36°. Следовательно, ΔBDA — равнобедренный и $BD = AD = \sqrt{20}$. Но ΔADC — то же, равнобедренный, так как ∠ADC = 180° – 36° – 72° = 72° и $AD = AC = \sqrt{20}$.

2. Используем свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{DC}{BD}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{20}}{DC+\sqrt{20}}=\frac{DC}{\sqrt{20}}.$$

3. Решим уравнение

$$DC^2+\sqrt{20}DC-20=0\Leftrightarrow DC=5-\sqrt{5}.$$

Тогда

$$AB=BC=BD+DC=\sqrt{20}+5-\sqrt{5}=$$
$$=2\sqrt{5}+5-\sqrt{5}=5+\sqrt{5}\approx 7{,}24$$

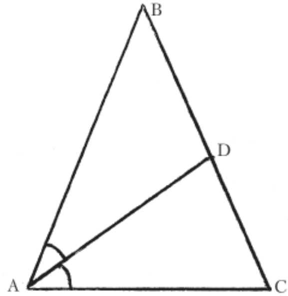

Рис. 7

$\boxed{7{,}24}$

Задача 8. Найти сумму расстояний от любой внутренней точки правильного треугольника до его сторон, длина которых равна $2/\sqrt{3}$.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 8). Из т. О опускаем перпендикуляры: MO⊥AB, NO⊥BC, KO⊥AC.

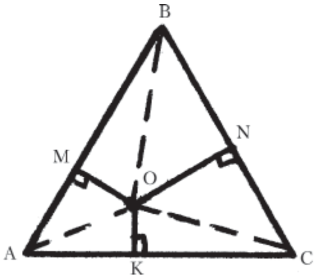

Рис. 8

2. Соединив т. О с точками A, B, C, получим три треугольника, сумма площадей которых равна площади ΔABC:

SΔABC = 0,5AC (MO + NO + OK) =

$$=\frac{AC^2\cdot\sqrt{3}}{4}\Rightarrow MO+NO+OK=$$
$$=AC\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1.$$

$\boxed{1}$

Задача 9. Высота равнобедренного треугольника разделена на 3 равные части. Через ближайшую к вершине точку деления и через вершину основания проведена прямая. В каком отношении она делит сторону треугольника (взять меньшее значение)?

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 9). По условию BM = BD/3. Проведем прямую MM_1, параллельную DC.

2. $\Delta BMM_1\sim\Delta BDC$ и $\Delta MKM_1\sim\Delta AKC$. Из первого подобия получим

$$\frac{BM}{MD}=\frac{BM_1}{BC}=\frac{MM_1}{DC}=\frac{1}{3}\Rightarrow BM_1=BC/3,\quad MM_1=DC/3.$$

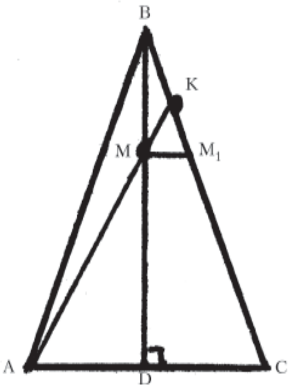

Рис. 9

Из второго подобия получим

$$\frac{MM_1}{AC}=\frac{KM_1}{KC}\Rightarrow$$
$$\frac{DC/3}{2DC}=\frac{1}{6}\Rightarrow MM_1=AC/6,$$
$$KM_1=KC/6;$$
$$BK=BM_1-KM_1=(BK+KC)/3-KC/6\Rightarrow$$
$$BK:KC=0{,}25.$$

$\boxed{0{,}25}$

Задача 10. Найти высоту равнобедренной трапеции, диагонали которой перпендикулярны и равны $\sqrt{8}$.

Решение. 1. Построим чертеж (рис. 10). Диагонали AC и BD пересекаются в точке O; $BB_1 \perp AD$.

2. Вычислим площадь трапеции двумя способами и приравняем результаты:

$$SABCD=0{,}5\cdot(BC+AD)\cdot BB_1=$$
$$=0{,}5\left(\sqrt{8}\right)^2=4.$$

3. Тогда $BB_1 = 8/(BC + AD)$.
Из ΔAOD и

$$\Delta BOC\Rightarrow AD=AO\cdot\sqrt{2},$$
$$BC=CO\sqrt{2},$$

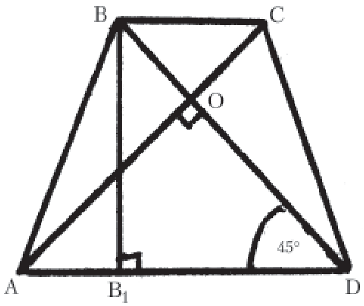

Рис. 10

$$BC+AD=\sqrt{2}(AO+OC)=\sqrt{2}\sqrt{8}=4.$$

4. Тогда высота трапеции $BB_1 = 8 : 4 = 2$.

$\boxed{2}$

В некоторых задачах планиметрии широко используются формулы тригонометрии. Иногда в условии задачи задаются даже одни углы без длин отрезков, которые приходится дополнительно вводить в условия задачи, хотя в ответе, они, конечно, будут отсутствовать. Это так называемые задачи по геометрии с применением тригонометрии (№ 11–20).

Задача 11. Высота равнобочной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции (α = 90°, h = 5).

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 11). Вычислим площадь трапеции по двум формулам 11 (в 3.1):

$$SABCD = \frac{1}{2}(BC + AD)h = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha$$

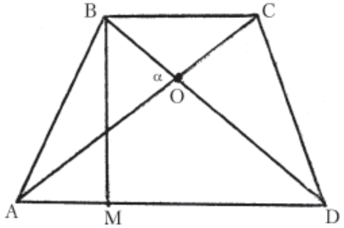

Рис. 11

2. Учитывая, что трапеция равнобочная, имеем: AC = BD, AO = OD,

$$\alpha = \angle ODA + \angle OAD, \quad \angle ODA = \frac{\alpha}{2}.$$

3. Из ΔBMD имеем

$$BM = h = BD \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

4. Подставив эти данные, найдем среднюю линию трапеции:

$$0,5(BC + AD) = \frac{1}{2h} \cdot \frac{h^2}{\sin^2\alpha/2} \cdot \sin\alpha = h\,ctg\frac{\alpha}{2}.$$

При $\frac{\alpha}{2} = 45^{\circ}$, h = 5 получим среднюю линию, равную высоте.

$\boxed{5}$

Задача 12. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b (косинус угла, a = 5, b = 4, d = 3, c = 2 с двумя знаками после запятой).

Решение. 1. Из условия задачи следует, что

∠B + ∠D = ∠A + ∠C = 180°

(рис. 12).

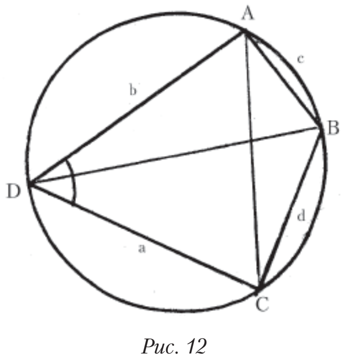

Рис. 12

2. Вычислим длину диагонали AC — стороны треугольников: ΔACD и ΔABC по теореме косинусов, формуле 3 (в 3.1).

$$AC^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\angle D,$$

$$AC^2 = d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos\angle B.$$

3. Приравняв левые части, получим:

$$b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\angle D =$$
$$= d^2 + c^2 - 2cd \cdot \cos\left(180^{\circ} - \angle D\right).$$

Откуда $\cos\angle D = \dfrac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2(ab+dc)} = \dfrac{5^2+4^2-3^2-2^2}{2(5\cdot 4+3\cdot 2)} = \dfrac{7}{13} \approx 0{,}54$

$\boxed{0{,}54}$

Задача 13. Найти отношение большего к меньшему радиусов двух внешне касающихся кругов, если угол между их общими касательными равен 60°.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 13). $AM = AM_1$ — касательные, $OM = r_2$, $O_1N = r_1$ $(r_2 > r_1)$ — радиусы касающихся кругов, $OM \perp AM$, $O_1N \perp AM$, $\angle MAM_1 = 60°$, $\angle MAO = 30°$.

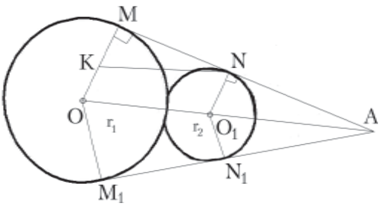

Рис. 13

2. Проведем $KN \parallel OA$, тогда из ΔKMN

$$\frac{KM}{KN} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right) = \frac{r_2}{r_1} + 1 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 3\,.$$

$\boxed{3}$

Задача 14. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника $a = \sqrt{3}$, с углом при основании, равны 30°.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 14). AM — биссектриса, AB = BC = x, AM = y, $\angle B = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$.

2. По теореме синусов (формула 4 в 3.1):

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{x}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 1\ .$$

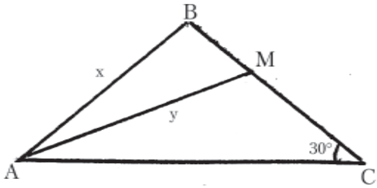

Рис. 14

3. По свойству биссектрисы внутреннего угла из ΔABC имеем

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{CM}{x - CM} \Rightarrow CM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

4. По теореме косинусов (формула 3 в 3.1) из ΔAMC запишем

$$AM^2 = AC^2 + MC^2 - 2 \cdot AC \cdot MC \cdot \cos 30^0 \Rightarrow$$

$$y^2 = 3 + \frac{3}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$AM = 0{,}5\sqrt{6} = \sqrt{1{,}5}\,.$$

$\boxed{\sqrt{1{,}5}}$

Задача 15. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большим из оснований углы $\alpha = 30°$ и $\beta = 45°$.

Определить радиус круга, если площадь трапеции $Q = \sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 15). Обозначим радиус круга OP = = OM = OQ = ON = r, AB = z, BC = x, CD = t, AD = y, $BB_1 = CC_1 = MN = 2r$.

2. Тогда, учитывая формулу 22 (в 3.1), запишем:

$x + y = z + t$.

3. Из формулы площади трапеции (формула11 в 3.1) получим

$$\frac{1}{2}(x+y) \cdot 2r = \sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right),$$

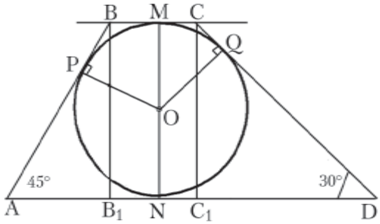

Рис. 15

4. Из ΔABB_1: $AB = z = 2r\sqrt{2}$;
из ΔCC_1D: $CD = t = 4r$.
5. Подставив соотношения из 2, 4 в 3, запишем

$$\left(2r\sqrt{2}+4r\right) \cdot r = \sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow 2\sqrt{2}r^2\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow$$

$$r^2 = 1,\, r = 1.$$

$\boxed{1}$

Задача 16. В сегмент, дуга которого содержит 120°, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, и две другие лежат на хорде. Площадь треугольника $S = 3\sqrt{3}$. Найти радиус сегмента.

Решение 1. Строим чертеж (рис. 16). Обозначим AO = MO = BO = = R = ?, MN = MP = NP = x.

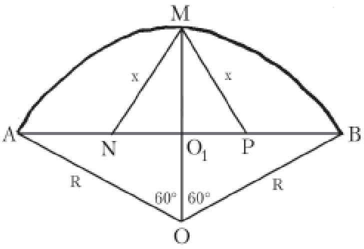

Рис. 16

2. Из ΔNMP:

$$S_{\Delta NMP} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$x^2 = 12,\ x = 2\sqrt{3}$.

3. Из ΔOO_1B: $OO_1 = R \cdot \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$.

Из ΔMO_1P: $MO_1 = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $OM = R = OO_1 + O_1M \Rightarrow R = \frac{R}{2} + x\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = x \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$.

$\boxed{6}$

Задача 17. Найти отношение большей стороны к меньшей треугольника, если его стороны образуют арифметическую прогрессию и угол, лежащий против меньшей стороны, равен 60°.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 17). Обозначим AB = y, BC = x, AC = z.

2. Тогда по условию: $y = \frac{x+z}{2}$.

3. По теореме косинусов (формула 3 в 3.1) из ΔABC получим

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cos 60^\circ =$$
$$= y^2 + z^2 - yz.$$

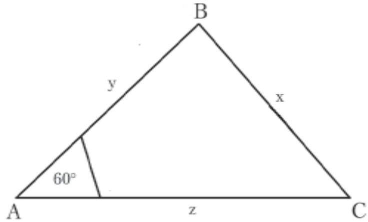

Рис. 17

4. Исключим y:

$$x^2 = \left(\frac{x+z}{2}\right)^2 + z^2 - z\left(\frac{x+z}{2}\right) \Rightarrow x = z.$$

5. Окончательно $\frac{z}{x} = 1$, т.е. треугольник — равносторонний.

$\boxed{1}$

Задача 18. В трапеции ABCD меньший угол при основании равен 45°, меньшая диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB.

Найти площадь сегмента, лежащего внутри окружности, проходящей через вершину верхнего основания B, радиуса $R = 2/\sqrt{\pi - 2}$, построенной как на диаметре на нижнем основании.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 18). AO = BO = OD = R.

2. $S_{сег} = S_{сек} - S_{\Delta AOB} =$

$$= \frac{\pi}{4}R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = 1$$

$\boxed{1}$

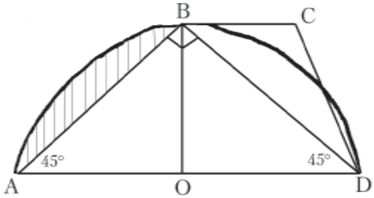

Рис. 18

Задача 19. Дан прямоугольный треугольник с острым углом 15°. В него вписана и около него описана окружность. Найти отношение большего радиуса к меньшему.

Решение 1. Сделаем чертеж (рис. 19). AO = OC = R — радиус описанной окружности, $MO_1 = NO_1 = O_1P = r$ — радиус вписанной окружности.

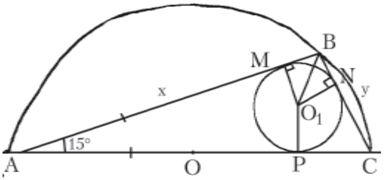

Рис. 19

2. Обозначим AB = x, BC = y, тогда с учетом свойств касательных проведенных из точки к окружности, запишем AP = AM, PC = CN, BM = BN = r (так как $MBNO_1$ — квадрат, что следует из равенства: $\Delta MBO_1 = \Delta NBO_1$).

3. Учитывая, что AC = AP + PC = =2R, получим: x + y = 2R + 2r = 2(R + r).

4. Из ΔABC: x = 2Rcos15°, y = 2Rsin15°, подставив которые в предыдущее соотношение, запишем

$$R + r = \frac{1}{2}2R\left(\cos 15^o + \sin 15^o\right) = R\left(\sin 15^o + \cos 15^0\right) \Rightarrow$$

$$1 + \frac{r}{R} = 2\cos 45^o \cdot \cos 30^0 \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{6} + 2 .$$

$\boxed{\sqrt{6} + 2}$

Задача 20. Через вершину острого угла α = 75° при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противоположную сторону и составляющая с основанием угол β = 30°. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника? (Взять большее значение.)

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 20). AB = BC, $\angle MAC = 30°$, тогда $\angle BAM = 45°$. Следует найти отношение площадей: $\dfrac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta AMB}} = ?$

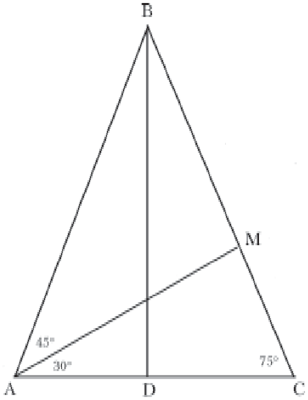

Рис. 20

2. Из ΔAMC: $\angle AMC = 180° - 30° - 75° = 75°$, следовательно, ΔAMC — равнобедренный.

Обозначим AB = BC = x, AC = AM = y.

3. Тогда искомое отношение равно (площадь треугольника нашли по формуле 5 из 3.1):

$$\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta AMB}} = \frac{\frac{1}{2} AC\cdot AM\sin 30^\circ}{\frac{1}{2} AM\cdot AB\sin 45^\circ} = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{x\sqrt{2}}.$$

4. Из ΔABC по теореме косинусов (формула 3 в 3.1) получим

$$AC^2 = x^2 + x^2 - 2x\cdot x\cos 30^\circ = x^2\left(2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow AC = x\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{x\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}},$$

так как

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

5. Так как $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, то искомое отношение равно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

6. Обратное отношение:

$$\frac{S_{\Delta AMB}}{S_{\Delta AMC}} = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \sqrt{3}+1,$$

очевидно, и будет ответом.

$$\boxed{\sqrt{3}+1}$$

Задача 21. В параллелограмме с острым углом в 60° и расстояниями от точки пересечения диагоналей до неравных сторон 3 и 2 найти отношение квадратов диагоналей (взять большее число).

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 21). $OM \perp AD$, $ON \perp CD$, $OM = 2$, $ON = 3$, тогда высоты $BB_1 = 2 \cdot 2 = 4$ и $BB_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $AB = x$, $BC = y$.

2.Из ΔABB_1: $BB_1 = AB\sin 60^\circ \Rightarrow$

$x = AB = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Аналогично из ΔBB_2C:

$$y = BC = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

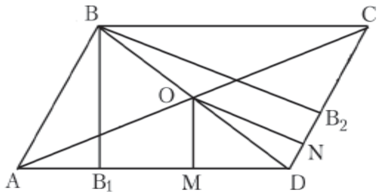

Рис. 21

3. Из ΔABD и ΔACD найдем квадраты диагоналей по теореме косинусов (формула 3 из 3.1).

$$BD^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^o = \frac{112}{3}, \quad AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^o = \frac{304}{3}.$$

4. Искомое отношение: $\dfrac{AC^2}{BD^2} = \dfrac{304}{112} = \dfrac{19}{7}$.

$\boxed{19/7}$

Задача 22. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$, а две другие — на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 22). Обозначим $AB = BC = CD = =AD = x$, $BM = MC = 0{,}5x$.

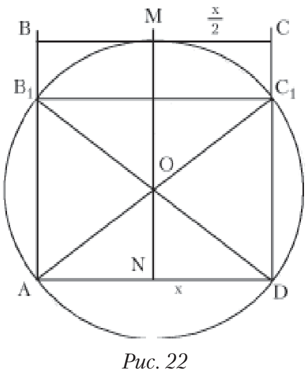

Рис. 22

2. Используя теорему о касательной и секущей проведенной из одной точки к окружности для т. С, запишем

$$MC^2 = CD \cdot CC_1 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \cdot CC_1.$$

3. Из ΔAC_1D:

$$C_1D = \sqrt{(2R)^2 - AD^2} = \sqrt{8 - x^2},$$

$$CC_1 = x - C_1D = x - \sqrt{8 - x^2}.$$

4. Подставив в предыдущее соотношение, получим

$$\frac{x^2}{4} = x\cdot\left(x-\sqrt{8-x^2}\right) \Rightarrow x = 1{,}6\sqrt{2}\ .$$

5. Окончательно: $AC_1 = B_1D = x\sqrt{2} = 3{,}2$.

$\boxed{3{,}2}$

Задача 23. На большем катете прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, описана полуокружность, пересекающая гипотенузу AC в точке D. Найти длину полуокружности, если BC = 30, BD = 24.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 23). Требуется найти $\frac{1}{2}C = \pi R$, т.е. R = ? AB = 2R, ΔABD — прямоугольный, так как ∠ADB опирается на диаметр.

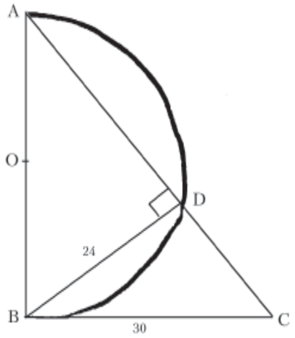

Рис. 23

2. Из ΔBDC

$DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ (по теореме Пифагора).

3. Используя метрические соотношения в прямоугольном ΔABC, запишем

$$BC^2 = AC\cdot DC \Rightarrow 30^2 =$$

$$= (18 + AD)\cdot 18 \Rightarrow AD = 32,\ AC = 50.$$

4. По теореме Пифагора из ΔABC

$$2R = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40 \Rightarrow R = 20,$$

$$\frac{1}{2}C = \pi R = 20\pi\ .$$

$\boxed{20\pi}$

Задача 24. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника по высоте h = 1 и полупериметру p = 3.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 24). Обозначим AB = x, BC = y, AC = z.

2. Тогда $p = \frac{x+y+z}{2} = 3$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}z\cdot 1$.

3. С учетом теоремы Пифагора получим систему трех уравнений.

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 = z^2, \\ xy = z. \end{cases}$$

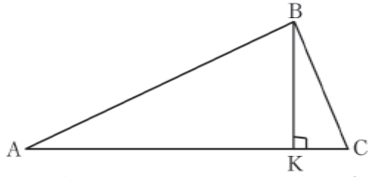

Рис. 24

4. Принимая во внимание формулу

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$$

запишем

$$6^2 = z^2 + z^2 + 2\left[z + z(x+y)\right] \Rightarrow 36 = 2z^2 + 2z + 2z(6-z).$$

5. Окончательно $z = \dfrac{18}{7}$.

$\boxed{18/7}$

Задача 25. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенной между сторонами треугольника.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 25), BD = 8, AC = 12. Обозначим $A_1C_1 = x = ?$, $AA_1 = C_1C = y$.

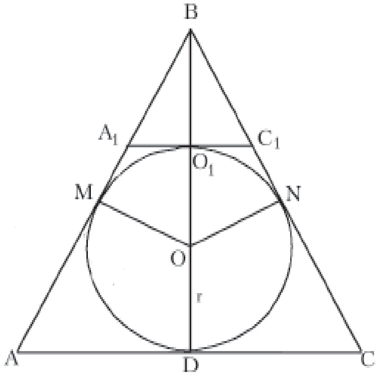

Рис. 25

2. AA_1C_1C — равнобочная трапеция. Учитывая условие вписывания окружности в выпуклый четырехугольник (формула 22 в 3.1), запишем

$$A_1C_1 + AC = 2AA_1 \Rightarrow x + 12 = y.$$

3. Из ΔBDC:

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

(по теореме Пифагора).

4. Найдем $MO = ON = OO_1 = OD = r$ — радиус вписанной окружности, уравняв площадь треугольника ABC (найденную по формулам 5 в 3.1):

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} 8 \cdot 12 = 48,$$

$$S_{\Delta ABC} = r \cdot p = r \cdot \left(\frac{10+10+12}{2}\right) = r \cdot 16, \; r = 3.$$

5. $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$: $\dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{BO_1}{BD} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{8-2\cdot 3}{8}$.

6. Окончательно: $A_1C_1 = x = 3$.

$\boxed{3}$

Задача 26. Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит тупой угол на части в отношении 1:3. Найти произведение длин сторон параллелограмма.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 26). Обозначим AB = CD = x, BC = AD = y, $\angle BAD = 60°$.

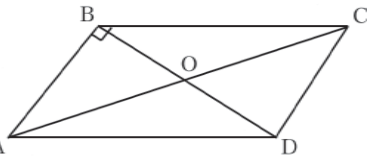

Рис. 26

2. По условию $\angle ABC = 120°$ делится в отношении 1:3, следовательно, $\angle CBD = 30°$, $\angle ABD = 90°$.

3. Из данных условия следует, что $2x + 2y = 90 \Rightarrow x + y = 45$.

4. Из ΔABD:

$$\frac{AB}{AD} = \sin 30° \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow r,\ y=2x.$$

Откуда $2x + x = 45 \Rightarrow x = 15, y = 30$.

5. Окончательно: xy = 450.

$\boxed{450}$

Задача 27. Окружность касается большого катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

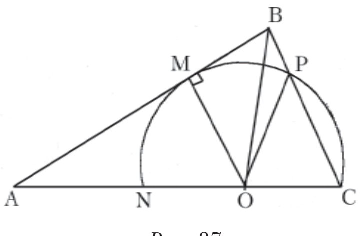

Рис. 27

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 27). Гипотенуза ΔABC равна

$AC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

2. Из ΔAMO: $AM = 12 - r$, $AO^2 =$
$= (12 - r)^2 + r^2 \Rightarrow (13 - r)^2 =$
$= (12 - r)^2 + r^2 \Rightarrow r^2 + 2r - 25 = 0$.

3. Окончательно: $r = \sqrt{13} - 1$.

$\boxed{\sqrt{13} - 1}$

Задача 28. Прямые, содержащие боковые стороны равнобочной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найти среднее арифметическое длин сторон трапеции, если ее площадь равна 12, а длина высоты равна 2.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 28). Обозначим AB = CD = x, BC = y, AD = z. Из точек B и C опустим перпендикуляры на AD.

2. Из ΔABB_1

$$AB_1 = BB_1 = x \cdot \sin 45^\circ = \frac{x\sqrt{2}}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$x = 2\sqrt{2}\,,\ z = y + 2\frac{x\sqrt{2}}{2} = y + x\sqrt{2}\,.$$

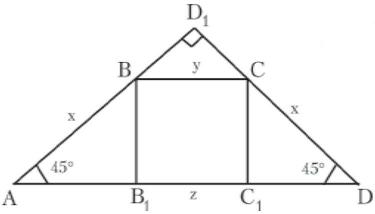

Рис. 28

3. Из данных условия следует, что

$$S = 12\text{ см}^2 = \frac{1}{2}(x+y)\cdot BB_1 \Rightarrow$$

$$\frac{(y+z)\sqrt{2}\cdot x}{4} = 12 \Rightarrow 48 = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\left(y + y + x\sqrt{2}\right) \Rightarrow$$

$$12 = 2y + 4 \Rightarrow y = 4\,,\ \ z = 8\,.$$

4. Окончательно $\frac{1}{4}(2x+y+z) = 3+\sqrt{2}$.

$$\boxed{3+\sqrt{2}}$$

Задача 29. В прямоугольном треугольнике найти отношение катетов, если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40:41 (взять меньшее значение).

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 29). Обозначим AB = y, BC = x,

тогда $\frac{x}{y} = ?$; $\angle BDC = \alpha$.

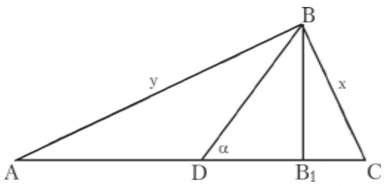

Рис. 29

2. По условию: $\frac{BB_1}{BD} = \frac{40}{41} = \sin\alpha$,

$\cos\alpha = \frac{9}{41}$.

3. Учитывая, что в прямоугольном треугольнике AD = BD, ΔADB — равнобедренный и $\angle BAD = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$.

4. По формуле 33 в 3.2 получим окончательно:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{y}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=0,8\,.$$

$\boxed{0,8}$

Задача 30. Найти угол (в градусах) при основании равнобедренного треугольника, в который вписаны один над другим два касающихся круга радиусов R и r, связанных зависимостью $R=r\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ (круги касаются сторон, а нижний еще и основания треугольника).

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 30). Из точки O_1 опустим перпендикуляр: $O_1M_2 \perp OM$. Тогда $\varphi = \angle BCD = \angle O_1OM_2$, $\angle O_1BM_1 = \angle OO_1M_2$.

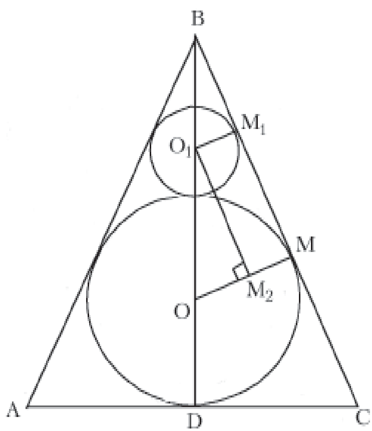

Рис. 30

2. Из ΔO_1OM_2:

$$\cos\varphi=\frac{OM_2}{OO_1}=\frac{R-r}{R+r}=$$

$$=\frac{R/r-1}{R/r+1}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2-1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

3. Окончательно: $\varphi = 30°$.

$\boxed{30}$