Глава 2

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

При решении задач по стереометрии (геометрии в пространстве) необходимо уделять большое внимание чертежу, способам изображения многогранников.

Так, например, одинаково, в виде параллелограмма изображаются на чертеже основания прямоугольных параллелепипедов (прямоугольники) и основания прямых (параллелограммы). Аналогично изображаются основания четырехугольных пирамид.

Наличие одинаковых углов наклона боковых ребер пирамиды говорит о том, что высота пирамиды проектируется в центр описанного около основания круга, а наличие одинаковых углов наклона граней пирамиды к плоскости основания говорит о том, что высота пирамиды проектируется в центр круга, вписанного в основание.

Во многих задачах на многогранники используется теорема о трех перпендикулярах (рис. 31). Строится прямоугольный треугольник (ΔSOM), состоящий из трех перпендикуляров: $SO \perp \alpha$ (SO — высота многогранника, опущенная на плоскость основания α); $SM \perp AB$ (наклонная к плоскости α и перпендикуляр к боковой грани), $OM \perp AB$ (OM — перпендикуляр к стороне основания, лежащей в плоскости α); $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла (между боковой гранью и плоскостью основания); ΔSMO — перпендикулярное сечение к ребру AB. При наличии двух перпендикуляров: $SO \perp \alpha$ и $SM \perp AB$ или $SO \perp \alpha$ и $OM \perp AB$ автоматически имеет место третий перпендикуляр: $OM \perp AB$ или $SM \perp AB$ соответственно.

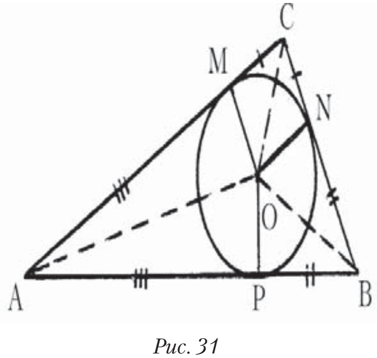


Рис. 31

Большое внимание следует обратить также на построение сечений внутри многогранников, которые часто целесообразно изображать на дополнительном чертеже (это может быть также основание многогранника, его боковая грань и т.д.).

При решении задач на вписанные фигуры (одна в другую) или описанные фигуры (одна около другой) необходимо иметь в виду следующие утверждения. Для того чтобы:

— около призмы можно было описать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и около ее основания можно было описать окружность;

— в призму можно было вписать цилиндр, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и в основание ее можно было вписать окружность;

— около пирамиды можно было описать конус, необходимо и достаточно, чтобы боковые ребра пирамиды имели равные длины;

— в пирамиду можно было вписать конус, необходимо и достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, а основание высоты пирамиды было центром окружности;

— около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность;

— около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы около ее основания можно было описать окружность;

— в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности;

— в пирамиду можно было вписать сферу, достаточно, чтобы в основание пирамиды можно было вписать окружность, центр которой совпадает с основанием высоты с учетом этих утверждений. Необходимо отметить, что:

— около любой прямой треугольной призмы и около любой правильной призмы можно описать цилиндр (боковое ребро призмы — образующая боковой поверхности цилиндра);

— любую прямую треугольную призму и в любую правильную призму можно вписать цилиндр (каждая боковая грань описанной около цилиндра призмы касается его боковой поверхности по образующей);

— в любую правильную пирамиду можно вписать конус (высота боковой грани — образующие конуса);

— около любой правильной пирамиды можно описать конус (боковое ребро пирамиды — образующая конуса);

— около любой правильной пирамиды и около любой правильной призмы можно описать сферу;

— в любой тетраэдр можно вписать сферу;

— в любую правильную пирамиду можно вписать сферу;

— в правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание;

— в любой конус можно вписать сферу (ее центр совпадает с центром окружности, вписанной в осевое сечение конуса, радиус сферы равен радиусу этой окружности);

— около любого цилиндра и около любого конуса можно описать сферу (центр сферы совпадает с центром окружности, описанной около осевого сечения соответственно цилиндра и конуса, радиус сферы равен радиусу этой окружности);

— в цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота равна диаметру основания (центр вписанной сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра).

Сфера называется вписанной в многогранник (а многогранник — описанным около сферы), если она касается всех его граней. Центр вписанной сферы является общей точкой биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранника (если этого нет — то нельзя вписать сферу).

Если вписанная сфера существует, то только одна. Однако не в каждый многогранник можно вписать сферу.

С учетом изложенных теоретических положений, формул (в 3.1) и методических замечаний рассмотрим 30 задач с подробными решениями.

2.1. Решенные задачи

Задача 131. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной C, и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 32). По условию

$\angle SAO = \angle SCO = \angle SBO = 45^{\circ}$,

где SO — высота пирамиды; $\angle CAB = 30°$; AB = C; $\angle ACB = 90°$.

2. Из этих данных следует, что $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO$ (по равному углу и катету SO, в прямоугольном треугольнике). Следовательно, AO = =CO = BO = SO = R — радиус описан-

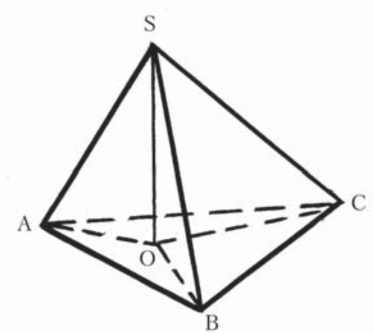


Рис. 32

ного круга. Точка O — центр описанного круга около ΔABC), но так как ΔACB — прямоугольный, то т. O должна лежать на гипотенузе AB = C. Чертеж необходимо уточнить и перестроить.

3. Перестроим чертеж (рис. 33). Целесообразно изобразить и плоскость основания (рис. 34).

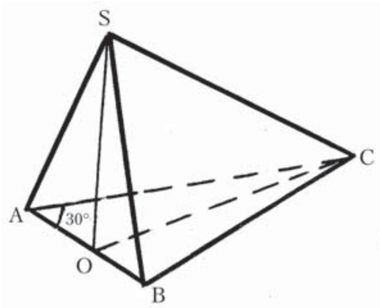


Рис. 33

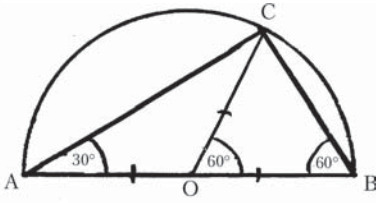


Рис. 34

SO⊥AB (плоскость ΔASB⊥ плоскости ΔACB)

AO = OB = OC = SO = R = 0,5 c.

4. Объем пирамиды: по формуле 30 (в 3.1):

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\Delta ACB}.$$

$$S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{R^2}{2}\sqrt{3},$$

$$V = \frac{1}{3} R \cdot \frac{R^2}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} R^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{C^3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{48} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 1{,}5.$$

$\boxed{1{,}5}$

Целесообразность плоского чертежа в этой задаче обусловлена и тем, что иногда допускают абитуриенты ошибку, считая, что CO⊥AB (что неверно).

Задача 132. Найти объем и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если даны боковое ребро l и диаметр круга d, вписанного в основание пирамиды.

В ответе взять отношение объема к боковой поверхности при l = 45, d = 6.

Решение. 1. Для изображения правильного шестиугольника (основание пирамиды) можно построить (рис. 35) две трапеции с общим основанием, длина изображения которого в 2 раза больше изображения ED и AB; изображение EF и BC; DC и FA равны (хотя величины изображенных отрезков различны, их длины равны: AB = = BC = CD = DE = EF = FA по условию). Точка O — центр вписанного и описанного круга.

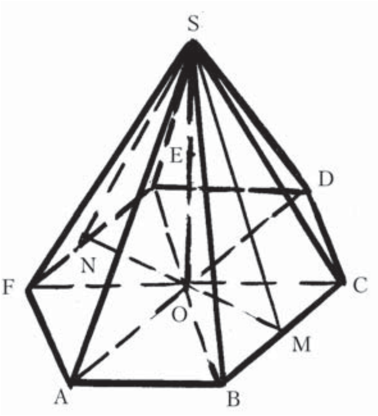


Рис. 35

2. Прямые $MN \perp FE$ и $MN \perp BC$, $MO = ON = 0{,}5d$ — радиус вписанного круга, $MN = d$ — диаметр вписанного круга.

3. По формуле 30 (в 3.1):

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot 6S_{\Delta BOC}, \quad S_{бок} = 6 \cdot S_{\Delta BSC} = 6 \cdot \frac{1}{2} SM \cdot BC.$$

Отметим, что SO — высота пирамиды, т.е. $SO \perp ABCDEF$, $OM \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $SM \perp BC$.

4. Из ΔOBM: $MC = BM = \frac{1}{2} BC = 0{,}5 \cdot \mathrm{tg}30^{\circ} = \frac{d\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow BC = \frac{d\sqrt{3}}{3}$.

Из $\Delta SOC: SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{3}}$.

Из ΔSCM найдем апофему

$$SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{l^2 - \frac{d^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{12l^2 - d^2},$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin 60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} d^2.$$

5. $$V = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{l^2 - \frac{d^2}{3}} \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{12} = \frac{d^2}{6}\sqrt{3l^2 - d^2},$$

$$S_{бок} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{12l^2 - d^2} \cdot \frac{d\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{2}\sqrt{12l^2 - d^2}.$$

Очевидно, что должна выполняться система неравенства, гарантируя существование решения:

$3l^2 - d^2 > 0$, $12l^2 - d^2 > 0 \Leftrightarrow d^2 < 3l^2$.

6. $V = \frac{1}{6} \cdot 6^2 \sqrt{3 \cdot 15 - 36} = 18$,

$S_{бок} = \frac{6}{2}\sqrt{12 \cdot 15 - 36} = 36$.

Отношение $\frac{V}{S} = 0,5$.

$\boxed{0,5}$

Задача 133. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13. а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Определить объем параллелепипеда.

Решение. 1. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники, хотя основания изображаются в виде паралеллограмма (рис. 36).

Диагональ B_1D = 13 см, диагонали: $AD_1 = 4\sqrt{10}$ см, $D_1C = 3\sqrt{17}$ см.

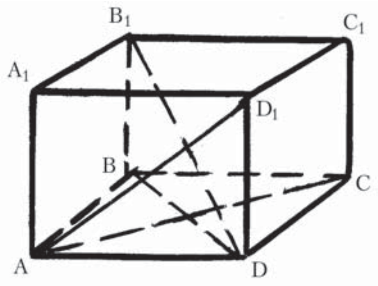


Рис. 36

2. Объем параллелепипеда равен произведению трех измерений, по формуле (29) (в 3.1)

$V = AD \cdot DC \cdot DD_1$

Из ΔAD_1D:

$AD_1 = 4\sqrt{10} = \sqrt{AD^2 + DD_1^2}$,

из ΔDD_1C:

$D_1C = 3\sqrt{17} = \sqrt{DC^2 + DD_1^2}$,

из ΔBB_1D: $B_1D = 13 = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{DD_1^2 + AD^2 + DC^2}$.

3. Избавляясь от корней, возводим в квадрат и получаем систему трех уравнений:

$AD^2 + DD_1^2 = 160$, $DC^2 + DD_1^2 = 153$, $AD^2 + DC^2 + DD_1^2 = 169$.

Исключив $DC^2 + DD_1^2$ из последних двух уравнений, получим

$AD^2 = 169 - 153 = 16 \Leftrightarrow AD = 4 \cdot$

Из первого уравнения: $DD_1^2 = 160 - 4^2 = 144 \Leftrightarrow DD_1^2 = 12$.

Из второго уравнения: $DC^2 = 153 - 144 = 9 \Leftrightarrow DC = 3$.

Окончательно $V = AD \cdot DC \cdot DD_1 = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144$.

$\boxed{144}$

Задача 134. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол β. Полученное сечение имеет площадь Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда $\left(Q = 4,\ \beta = \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение. 1. Сечение параллелепипеда — параллелограмм (рис. 37) AB_1C_1D. Для построения линейного угла β, характеризующего двугранный угол, образуемый сечением AB_1C_1D и плоскостью основания ABCD, используем теорему о трех перпендикулярах (см. выше рис. 31). Для этого из точки B_1 опустим перпендикуляр на AD: $B_1M \perp AD$.

Так как $B_1B \perp ABCD$, то, соединив B_1 и M, получим: $B_1M \perp AD$, следовательно, $\angle B_1MD = \beta$ — линейный угол двугранного угла.

2. Боковая поверхность состоит из четырех равных прямоугольников (в основании ромб и AB = BC = CD = AD:

$S_{бок} = 4S_{BB_1C_1C} = 4BB_1 \cdot BC$.

Площадь сечения

$Q = B_1M \cdot AD = B_1M \cdot BC$.

3. Из ΔBB_1M: $BB_1 = B_1M \cdot \sin\beta$.

Тогда

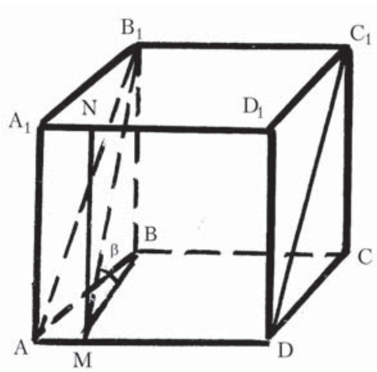


Рис. 37

$$S_{бок} = 4BB_1 \cdot BC = 4B_1M \cdot BC\sin\beta = 4Q\sin\beta = 4 \cdot 4\sin\frac{\pi}{6} = 16 \cdot 0{,}5 = 8.$$

$\boxed{8}$

Задача 135. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды $\left(R = \sqrt{3},\ \varphi = 60^\circ,\ \alpha = 60^\circ\right)$.

Решение. 1. Согласно теории, приведенной в начале главы. в данную пирамиду можно вписать шар, причем его центр лежит на пересечении биссекторов (биссектрис перпендикулярных сечений) двугранных углов; он отстоит на одинаковом расстоянии от граней и основания.

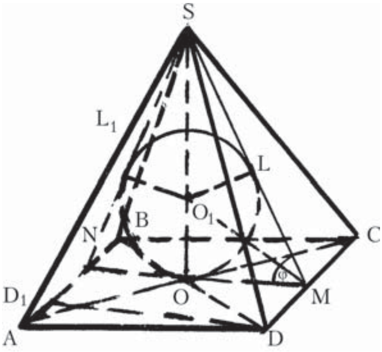


Рис. 38

Построим линейный угол двугранного угла (рис. 38) при основании. Для этого из т. O опустим перпендикуляр на DC: $OM \perp DC$ (и продолжим его до пересечения в т. N со стороной AB).

Прямая $SM \perp DC$ (по теореме о трех перпендикулярах); $SO \perp ABCD$, $OM \perp DC$, SM — наклонная, OM — ее проекция). Следовательно, $\angle SMN = \varphi$.

2. Проведем биссектрису угла φ — прямую MO_1, пересекающую высоту в т. O_1 — центре шара; $L_1O_1 = O_1O = O_1L = R$ — радиус шара и радиус вписанного в ΔNSM круга (сам ΔNSM — это перпендикулярное сечение к ABCD и к ребру DC).

3. Объем пирамиды найдем по формуле 30 (в 3.1).

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot SABCD = \frac{1}{3}SO \cdot MN \cdot DC.$$

Из ΔOO_1M: $OM = \frac{1}{2}MN = OO_1 \cdot ctg\frac{\varphi}{2} = Rctg\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow MN = 2ctg\frac{\varphi}{2}$.

Из ΔSOM: $SO = OM \cdot tg\varphi = Rctg\frac{\varphi}{2} \cdot tg\varphi$.

4. Из $\Delta DAD_1(DD_1 \| MN)$ $AD = DC = DD_1 : \sin\alpha \Leftrightarrow DC = \frac{2Rctg(\varphi/2)}{\sin\alpha}$.

5. Окончательно

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot MN \cdot DC = \frac{1}{3}Rctg\frac{\varphi}{2} \cdot tg\varphi \cdot 2Rctg\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{2Rctg\frac{\varphi}{2}}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{4R^3 \cdot \mathrm{tg}\varphi \cdot \mathrm{ctg}^3 \frac{\varphi}{2}}{3\sin\varphi} = \frac{4\left(\sqrt{3}\right)^3 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3}{3\frac{\sqrt{3}}{2}} = 72.$$

$\boxed{72}$

Задача 136. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Как относится его объем к объему призмы?

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 39). Согласно теории, приведенной в начале главы, около любой правильной призмы можно описать сферу. Причем $A_1O_2 = B_1O_2 = C_1O_2 = AO_2 = BO_2 = CO_2 = R$ — радиус шара.

Центр сферы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около призмы O_1 и O.

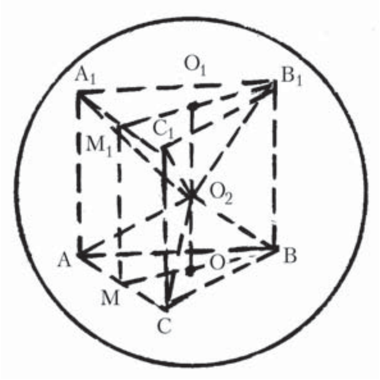


Рис. 39

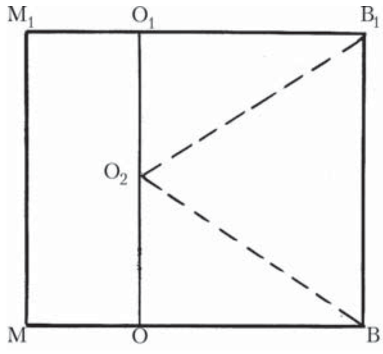


Рис. 40

2. Рассмотрим также сечение шара и призмы плоскостью, проходящей через O_1O и B_1B. Это — прямоугольник MM_1B_1B (рис. 40), причем $O_2B_1 = O_2B = R$, M_1B_1 — высота (биссектриса, медиана);

$$O_1B_1 = \frac{2}{3}M_1B_1.$$

Обозначим сторону основания
$AB = BC = AC = A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = a$.

Тогда $M_1B_1 = MB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow O_1B_1 = \frac{2}{3}M_1B_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

По условию $AA_1 = BB_1 = CC_1 = OO_1 = 2a$. По формулам 28, 35 (в 3.1).

$$V_{пр} = O_1O \cdot S_{\Delta ABC} = 2a \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2},$$

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot O_2B_1^3.$$

Из $\Delta O_2O_1B_1$: $R = O_2B_1 = \sqrt{O_1O_2^2 + O_1B_1^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$,

$$\frac{V_ш}{V_{пр}} = \frac{4}{3}\pi\left(O_2B_1\right)^3 : \frac{a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi}{27} \approx 7{,}44,$$

$(\pi = 3{,}14)$.

$\boxed{7{,}44}$

Задача 137. На высоте конуса, равной H, как на диаметре, описан шар. Определить объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен $\alpha\left(H = 4/\sqrt[3]{\pi},\ \alpha = 30^\circ\right)$.

Решение. 1. Рассмотрим осевое сечение (рис. 41) конуса и шара. Осевое сечение части шара, объем которой необходимо найти, обозначено штриховкой. Этот объем V равен разности между объемом V_2 шарового сегмента MECFNK и объемом V_1 конуса MCN.

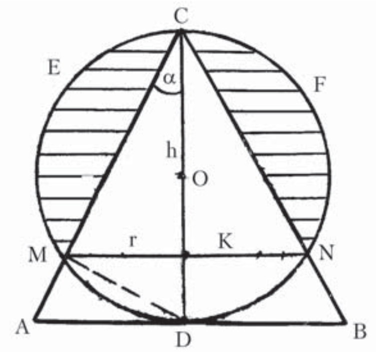


Рис. 41

2. Введем обозначения: CK = h, MK = r, $CO = R = \frac{H}{2}$ радиус шара. Тогда $V = V_2 - V_1 = \pi h^2 \cdot \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3}\right) - \frac{\pi r^2 h}{3}$.

3. Из ΔCMK и ΔCMD: $h = MC \cdot \cos\alpha$, $MC = H \cdot \cos\alpha$, $h = H\cos^2\alpha$ и $r = MC \cdot \sin\alpha = H\cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

Учитывая формулы 38, 41 (в 3.1), найдем искомый объем:

$$V = \frac{\pi h}{6}\left[h\left(3H - 2h\right) - 2r^2\right].$$

Произведем вычисления: $\left[h(3H-2h)-2r^2\right]=3hH-2\left(h^2+r^2\right)=$

$$=3Hh-2\left(H^2\cos^4\alpha+H^2\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha\right)=3Hh-2H^2\cos^2\alpha=$$

$$=3H^2\cos^2\alpha-2H^2\cos^2\alpha=H^2\cos^2\alpha.$$

Окончательно $V=\dfrac{\pi H^3}{6}\cos^4\alpha=\dfrac{\pi\cdot 64\cdot 9}{\pi\cdot 6\cdot 16}=6$.

$\boxed{6}$

Задача 138. Найти в градусах величину угла между боковой гранью и плоскостью основания правильной четырехугольной пирамиды, если высота ее меньше радиуса шара, описанного около нее и отношение радиуса шара к стороне основания равно 0,75.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 42). Построим линейный угол двугранного угла при основании (α), опустив два перпендикуляра: $SK\perp DC$ и $O_1K\perp DC$, $\angle\alpha=\angle SKO_1$.

2. Сечение шара плоскостью, проходящей через точки A, S, C, O, есть круг радиуса R — шара.

3. Обозначим сторону основания a, тогда по условию R: a = 0,75.

Из ΔOO_1C:

$$OO_1=\sqrt{R^2-O_1C^2}=$$

$$=\sqrt{0,75^2a^2-0,5a^2}=0,25a.$$

Тогда $SO_1=R-OO_1=$

$$=R-0,25\cdot 4R/3=2R/3.$$

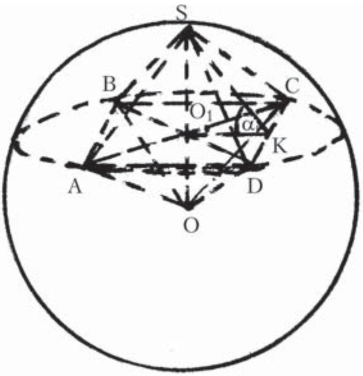


Рис. 42

4. Из ΔSO_1K:

$SO_1=O_1K\text{tg}\alpha\Rightarrow 2/3R:0,5a=1\Rightarrow \text{tg}\alpha=1,\alpha=45°$.

$\boxed{45}$

Задача 139. Найти площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды (со стороной основания $a=\sqrt[4]{3}$ и двугранным углом при основании α = 60°), проведенного через сторону основания под углом β = 30° к нему.

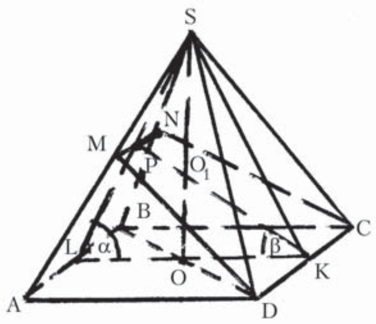


Рис. 43

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 43). Построим сечение DMNC — равнобочную трапецию ($MN \parallel DC$). Так как линейные углы $\alpha = \angle SLO = \angle SKO = 60°$, угол $\beta = \angle PKL = 30°$, то ΔLSK — равносторонний, $\angle LPK = 90°$, $KP \perp SL$.

2. Площадь сечения

$S = 0{,}5(MN + CD)PK$.

Так как $SP = PL$, $MN = 0{,}5AB = 0{,}5CD$, $PK = LK\cos 30°$,

то $S = 0{,}5(0{,}5a + a)a0{,}5\sqrt{3} =$

$= 3\sqrt{3} \cdot a^2/8 = 9/8 = 1{,}125$.

$\boxed{1{,}125}$

Задача 140. Найти радиус окружности, на которой лежат точки касания вписанного в правильную четырехугольную пирамиду шара, со стороной основания 4, если угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 44). Подробности, связанные с вписыванием шара в пирамиду, приведены в задаче 135.

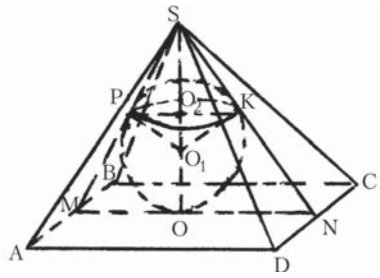


Рис. 44

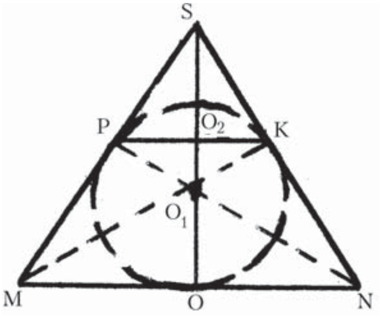


Рис. 45

2. Сделаем также плоский чертеж, взяв осевое сечение (рис. 45): ΔMSN, $PO_2 = O_2K$ –искомый радиус.

Из ΔOO_1N: $O_1O = ON \cdot tg30° = 2\sqrt{3}/3$.

Из ΔO_1O_2K: $O_2K = O_1K \cdot \sin 60° = 1$ ($OO_1 = PO_1 = O_1K$ — радиус шара).

$\boxed{1}$

В главе 1 уже отмечалось, что часто в геометрических задачах широко используются формулы тригонометрии: в одних случаях они позволяют упростить нахождение решения, в других — без них нельзя решить задачу (когда отсутствует или недостаточное количество отрезков, вынуждает дополнительно вводить отрезки, чтобы решить задачу и исключить их в ответе). Все это относится и к задачам стереометрии с применением геометрии. Рассмотрим это подробнее на примере задач (№ 141–150).

Задача 141. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы, со сторонами a и острым углом α. Определить объем этого параллелепипеда.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 46). Высота параллелепипеда $A_1E \perp ABCD$, высоты боковых граней: $A_1F \perp AD$ и $A_1F_1 \perp AB$. Тогда, соединив точки F и E и F_1 и E, по теореме о трех перпендикулярах (см. теорию к главе 2) получим: $EF \perp AD$ и $EF_1 \perp AB$. Из равенства прямоугольных треугольников $\Delta A_1EF = \Delta AEF_1$ имеем $EF = EF_1$, и AE — биссектриса острого угла ромба α, т.е. т. E лежит на диагонали ромба AC.

2. Объем призмы по формуле 28 (в 3.1) $V = SABCD \cdot A_1E$. Площадь основания: $SABCD = a^2 \sin\alpha$.

Из ΔAA_1E:

$$A_1E = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{a^2 - AE^2}.$$

3. Для нахождения AE вначале определим AF из ΔAA_1F; затем найдем AE из ΔAEF: $AF = AA_1 \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$;

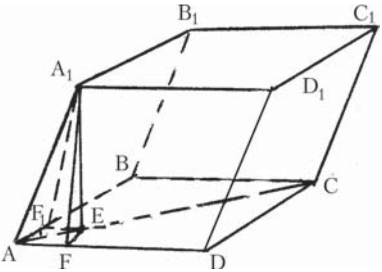


Рис. 46

$$AE = \frac{AF}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда $A_1E = \sqrt{a^2 - a^2 \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha/2}} = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} =$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha - 1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

4. $V = a^2 \sin\alpha \dfrac{a}{\cos\alpha/2}\sqrt{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 2a^3 \sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\dfrac{3\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

При $\alpha = 60°$, $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{32}{2} = 1$, $a = \sqrt{2}$, $V = 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 2$.

$\boxed{2}$

Задача 142. В прямоугольном параллелепипеде диагональ равна d и составляет со стороной основания угол, равный α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, равный β. Найти объем параллелепипеда ($\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $d = \sqrt{6}$).

Решение. 1. Построим чертеж (рис. 47). В прямоугольном параллелепипеде ребро $B_1B \perp ABCD$, $AB \perp AD$ и по теореме о трех перпендикулярах $AB_1 \perp AD$. Следовательно, сечение AB_1C_1D является прямоугольником, $\angle B_1AD = 90°$.

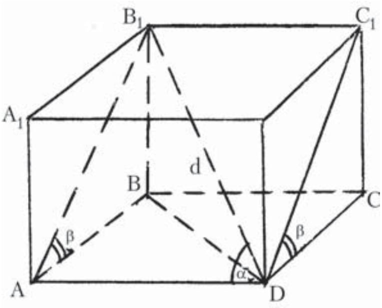


Рис. 47

2. Объем параллелепипеда по формуле 29 (в 3.1):

$V = AD \cdot DC \cdot BB_1$.

Из ΔAB_1D: $AB_1 = d\sin\alpha$, $AD = d\cos\alpha$, а из ΔAB_1B: $AB = DC = AB_1\cos\beta = d\sin\alpha\cos\beta$, $BB_1 = AB_1\sin\beta = d\sin\alpha\sin\beta$.

3. $V = AD\cdot DC\cdot BB_1 =$

$= d\cos\alpha\cdot d\sin\alpha\cos\beta\cdot d\sin\alpha\sin\beta =$

$= \dfrac{d^3}{4}\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

Так как $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$ и $d = \sqrt{6}$, то

$$V = \frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2,25 .$$

$\boxed{2,25}$

Задача 143. Основанием пирамиды служит прямоугольник, диагонали которого образуют между собой угол α, а боковые ребра ее составляют с плоскостью основания угол β. Найти объем пирамиды, если известно, что радиус описанного около нее шара равен R ($\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $R = 2$).

Решение. 1. Построим чертеж (рис. 48). Наряду с пространственным изображением целесообразно изобразить и плоское (рис. 49), взяв сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ее высоту и диагональ основания. По условию $AC = BD$, $\angle SCO_1 = \angle SDO_1 = \angle SBO_1 = \angle SAO_1 = \beta$, $\angle BO_1A = \alpha$.

$AO = BO = CO = DO = SO = R$.

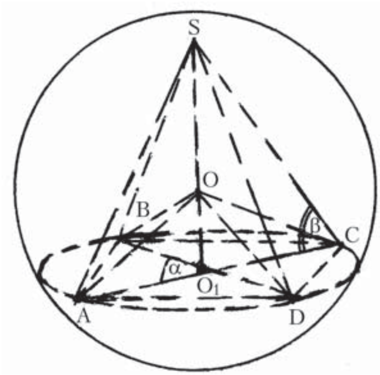


Рис. 48

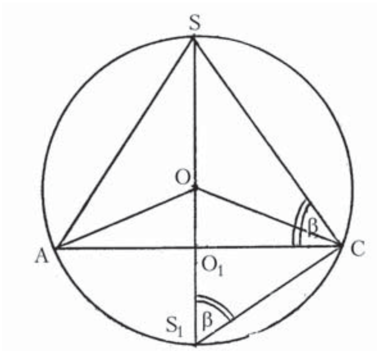


Рис. 49

2. Объем пирамиды по формуле 30 (в 3.1):

$$V = \frac{1}{3} SO_1 \cdot SABCD, \quad SABCD = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha = \frac{1}{2} AC^2 \sin\alpha.$$

По теореме синусов, формуле 4 (в 3.1):

$$\frac{AC}{\sin\angle ASC} = 2R \Leftrightarrow AC = 2R\sin\left(180° - 2\beta\right) = 2R\sin 2\beta,$$

$$AO_1 = O_1C = \frac{AC}{2} = R\sin 2\beta.$$

3. Из ΔSO_1C: $SO_1 = O_1C \cdot \mathrm{tg}\beta = R\sin 2\beta \cdot \mathrm{tg}\beta$.

4. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} R\sin 2\beta \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin^2 2\beta \cdot \sin\alpha = \frac{2}{3} R^3 \sin^3 2\beta \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \sin\alpha.$$

При $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $R = 2$ имеем

$$V=\frac{2}{3}\cdot 8\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=3.$$

$\boxed{3}$

Задача 144. Найти угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого вдвое больше поверхности вписанного в него шара. (Найти косинус угла с точностью до сотых)

Решение. 1. Изобразим осевое сечение конуса — равнобочную трапецию ABCD (рис. 50): $BK = KC = r_1$ — радиус верхнего основания, $AL = LD = r_2$ — радиус нижнего основания, $MO = NO = LO = R$ — радиус шара, $AB = CD = l$ — образующая конуса, искомый угол $\alpha =$ $= \angle BAL = \angle CDL$.

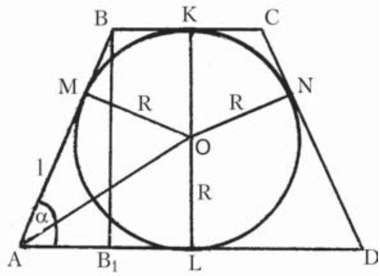


Рис. 50

2. Полная поверхность конуса по формуле 33 (в 3.1):

$$S_п = S_{бок} + \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right).$$

Поверхность шара по формуле 35 (в 3.1):

$$S_ш = 4\pi R^2.$$

Боковая поверхность конуса

$$S_{бок} = \pi l\left(r_1 + r_2\right).$$

3. По условию

$$S_п = 2S_ш \Leftrightarrow \pi\left[l\left(r_1 + r_2\right) + \left(r_1^2 + r_2^2\right)\right] = 8\pi R^2.$$

4. Из ΔABB_1: $BB_1 = 2R = l\sin\alpha$, $AB_1 = l\cos\alpha$.

Учитывая, что $AB_1 = r_2 - r_1$, $R = 0{,}5l\sin\alpha$ и по условию задачи $2(r_1 + r_2) =$ $= 2l$ — (свойство четырехугольника, в который вписана окружность), $r_1^2 + r_2^2 = 0{,}5l^2\left(1+\cos^2\alpha\right)$, из соотношения 3. Получим:

$$\left[l\cdot l + 0{,}5l^2\left(1+\cos^2\alpha\right)\right] = 2l^2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 0{,}2 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45$$

$$\left(0 < \alpha < 90^\circ\right).$$

$\boxed{0{,}45}$

Задача 145. В конус вписан цилиндр; нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания конуса. Прямая, соединяющая центр верхнего основания цилиндра и точку на окружности основания конуса. составляет с плоскостью основания угол, равный α. Найти отношение объема конуса к объему цилиндра, если угол между образующей и высотой конуса равен β($\alpha = 45°$, $\beta = 30°$ с точностью до сотых).

Решение. 1. Изобразим осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник (рис. 51) ASB, в который вписан прямоугольник MM_1N_1N — осевое сечение цилиндра. Обозначим $AO = BO = R$, $M_1O_1 = N_1O_1 = MO = NO = r$ — соответственно радиусы конуса и цилиндра. Обозначим $\angle ASO = \beta$, $\angle O_1AO = \alpha$.

Высота конуса $SO = h$, высота цилиндра $OO_1 = h_1$.

2. Объем конуса и цилиндра по формулам 37, 38 (в 3.1):

$$V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h, \quad V_ц = \pi R^2 \cdot h_1.$$

Из ΔASO: $h = R\mathrm{ctg}\beta$, а из ΔAO_1O: $h_1 = R\mathrm{tg}\alpha$.

Отношение объемов: $\dfrac{V_к}{V_ц} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi R^2 h}{\pi r^2 h_1}$.

3. Принимая во внимание, что $SO_1 = h - h_1 = r\mathrm{ctg}\beta$, выразим все длины отрезков через R и подставим в отношение:

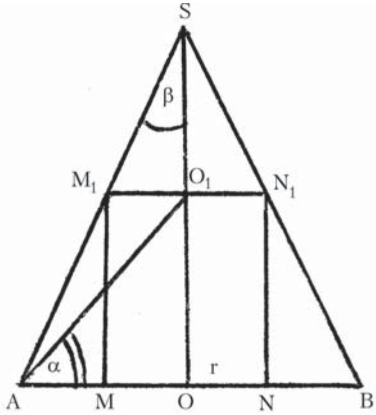


Рис. 51

$$\frac{V_к}{V_ц} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2 \cdot R \cdot \mathrm{ctg}\beta}{(R\mathrm{ctg}\beta - R\mathrm{tg}\alpha)^2 \cdot \mathrm{tg}^2\beta \cdot R\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mathrm{ctg}^3\beta \cdot \mathrm{ctg}^3\alpha}{3(\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\alpha - 1)^2} =$$

$$= \frac{\cos^3\beta\cos^3\alpha}{3\sin\beta\sin\alpha \cdot \cos^2(\alpha+\beta)}.$$

4. Подставив $\cos\beta = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\beta = 0{,}5$,

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получим окончательно: $\dfrac{V_к}{V_ц} \approx 3{,}23$.

$\boxed{3{,}23}$

Задача 146. Шар радиуса $\sqrt[3]{3/\pi}$ вписан в конус с углом 30° при вершине осевого сечения. Найти объем получившегося при этом шарового сегмента, высота которого меньше радиуса шара. Ответ записать с точностью до сотых.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 52). Берем осевое сечение конуса и шара плоскостью, проходящей через высоту конуса и центр шара.

2. Объем шарового сегмента согласно формуле 41 (в 3.1) запишется так:

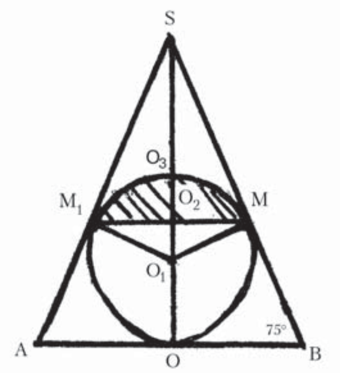


Рис. 52

$$V = \pi h_1^2 (R - h_1/3) =$$
$$= \pi \cdot O_2O_3^2 (O_1M - O_2O_3/3),$$

где радиус шара $R = O_2M$, высота шарового сегмента $h_1 = O_2O_3$. Учитывая, что $\angle OSB = \angle O_2MO_1 = 15°$, из ΔO_1O_2M: $O_1O_2 = R \cdot \sin 15°$, $O_2O_3 = R(1 - \sin 15°)$. Тогда $V = \pi \cdot R^2(1 - \sin 15°)^2 [R - R(1 - \sin 15°)/3] = \pi R^3(1 - \sin 15°)^2(2 + \sin 15°)/3$.

3. Вычислим $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot 0{,}25 \approx 0{,}25 \cdot 1{,}41 \cdot (1{,}73 - 1) =$$
$$= 0{,}26.$$

4. Окончательно $V = \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{3}{\pi}(1 - 0{,}26)^2 (2 + 0{,}26) \approx 1{,}24$.

$\boxed{1{,}24}$

Задача 147. Найти объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой наклонено под углом 30° к плоскости основания и удалено от середины противоположной стороны на расстояние $B = \sqrt[3]{27/16}$.

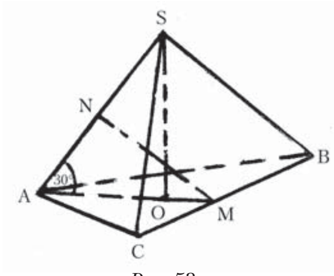
Решение. 1. Сделаем чертеж (рис. 53). Обозначим AB = AC = BC = a, MN = b.

2. Из ΔANM, ΔABC, ΔASO получим: AM = 2b, a = 4b: $\sqrt{3}$, SO =

$$= AO\operatorname{tg}30° = \frac{2}{3} \cdot 2b \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4b\sqrt{3}/9.$$

3. Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4b\sqrt{3}}{9}\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2=$$
$$=\frac{16b^3}{27}=1.$$



$\boxed{1}$

Рис. 53

Задача 148. Найти объем треугольной призмы, в основании которой равнобедренный треугольник с углом 90°, периметр которого равен 2P. Через середину нижнего основания под углом 60°и через противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость $\left(P=\sqrt[3]{(7+\sqrt{50})/\sqrt{3}}\right)$.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 54). AC = AB, MB = O, 5BC = =ABsin45°, MA = ABsin45° из ΔMBA.

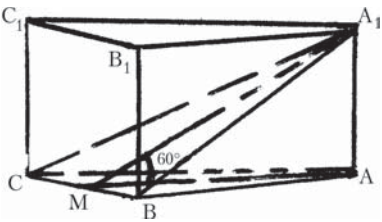


Рис. 54

2. Найдем AB:

$2AB+BC=2P\Rightarrow AB=P/(1+\sin 45^o);$

$S_{\Delta ABC}=0,5AB^2\sin 90^o,$

$AA_1=AM\cdot tg60^o$ из ΔMA_1A.

3. Объем призмы:

$$V=AA_1\cdot S_{\Delta ABC}=$$
$$=0,5\cdot AB^3\cdot tg60^o\cdot\cos 45^o\cdot\sin 90^o=P^3\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1\cdot 0,5/(1+0,5\sqrt{2})^3=1.$$

$\boxed{1}$

Задача 149. Ромб со стороной $a=\sqrt[3]{2/\pi}$ и острым углом 60° вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 55). Объем тела вращения равен удвоенной разности объемов: усеченного конуса $ABB_1A_1(V_1)$ и конуса $BCB_1(V_2)$: $V = 2(V_1 - V_2)$.

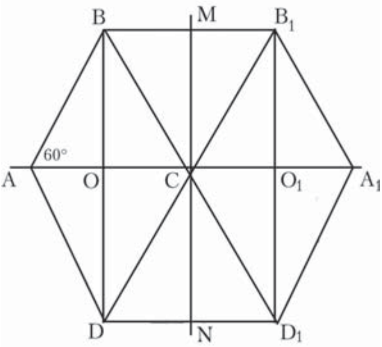


Рис. 55

2. По формулам 38, 39 (в 3.1) запишем

$$V = 2\left[\frac{MC}{3}\pi\left(BM^2 + AC^2 + BM\cdot AC\right) - \frac{MC}{3}\pi\cdot BM^2\right] = \frac{2}{3}\pi\cdot MC\cdot AC\left(AC + BM\right).$$

3. Из ΔBOC:

$BM = OC = a\sin 30^\circ = 0{,}5a;$

$BO = MC = a\cos 30^\circ = a\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ AC = a.$

4. Подставив эти данные, окончательно получим

$$V = \frac{2\pi}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\left(a + 0{,}5a\right) = \pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^3 = \sqrt{3}.$$

$\boxed{\sqrt{3}}$

Задача 150. Во сколько раз площадь сечения в правильной шестиугольной пирамиде, проведенного параллельно боковой грани через большую диагональ основания, больше площади боковой грани?

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 56). Обозначим $SM = SM_1 = y$, $AF = x$.

2. Искомое сечение должно проходить через BE и $OO_1 \| SM$ (на основании теоремы о пересечении двух параллельных плоскостей третьей). По этой же причине $B_1E_1 \| CD$; $SM \perp AF$, $SM_1 \perp E_1D$.

3. Тогда в ΔMSM_1 отрезок O_1O является средней линией и ΔOO_1M_1 — равносторонней.

4. Площадь трапеции

$$BB_1E_1E = \frac{1}{2}\left(B_1E_1 + BE\right)\cdot OO_1,$$

а площадь боковой грани

$$\Delta ASF = \frac{1}{2}SM\cdot AF.$$

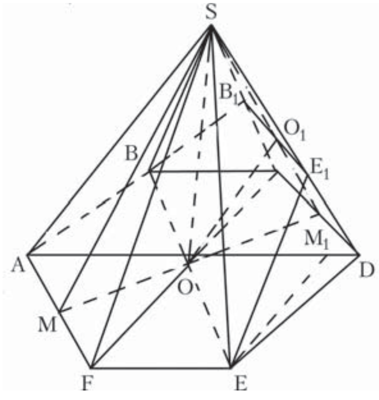


Рис. 56

5. Учитывая, что $OO_1 = \frac{y}{2}$; $BE = 2x$; $B_1E_1 = 0,5x$, получим

$$\frac{S_{BB_1E_1E}}{S_{\Delta ASF}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+2x\right)\frac{y}{2}}{\frac{1}{2}xy} = 1,25.$$

$\boxed{1,25}$

Задача 151. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания 12, а боковое ребро 10. Определить площадь ее боковой поверхности.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 57). По условию SA = SB = SC = = SD = 10, AB = BC = CD = DA = 12.

2. По формуле 26 (в 3.1) площадь боковой поверхности равна

$S_{бок} = 4S_{\Delta SDC} = 4 \cdot 0,5 \cdot SK \cdot DC = 2SK \cdot 12$

3. Из ΔSDK

$SK = \sqrt{SD^2 - DK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

4. Тогда $S_{бок} = 2{\cdot}8{\cdot}12 = 192$.

$\boxed{192}$

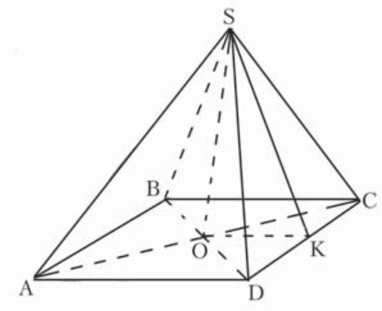


Рис. 57

Задача 152. В круговой конус с углом между образующей и плоскостью основания, равным 60°, и высотой, равной $3\sqrt{3/\pi}$, вписан шар. Найти площадь поверхности шара.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 58). Изобразим осевое сечение конуса. Обозначим $\angle SAO = \angle SBO = 60^o$, $SO = 3\sqrt{3/\pi}$, $O_1M = O_1O = r$ — радиус шара.

2. По формуле 35 (в 3.1) площадь поверхности шара $S = 4\pi r^2$. O_1B — биссектриса угла SBO, $\angle O_1BO = 30°$.

3. Из ΔO_1OB: $\frac{O_1O}{OB} = tg30^o \Rightarrow r$, $r = OB\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Из ΔSOB: $OB = SOctg60^o = \frac{\sqrt{3}}{3}SO$.

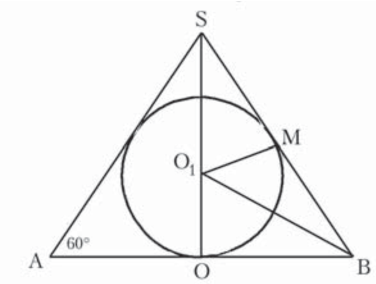


Рис. 58

4. Тогда $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot SO = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

5. Окончательно:

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{3}{\pi}}\right)^2 = 12 .$$

$\boxed{12}$

Задача 153. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти отношение площади боковой поверхности к площади основания конуса.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 59), взяв осевое сечение конуса. Обозначим: образующая конуса AB = BC = l, $\angle BCO = \angle BAC = 60°$.

2. Из ΔAOB: радиус основания

$$AO = OC = l\cos 60° = \frac{l}{2}.$$

3. Отношение

$$\frac{S_{бок}}{S_{осн}} = \frac{\pi \cdot OC \cdot l}{\pi OC^2} = \frac{l}{OC} = 2 .$$

$\boxed{2}$

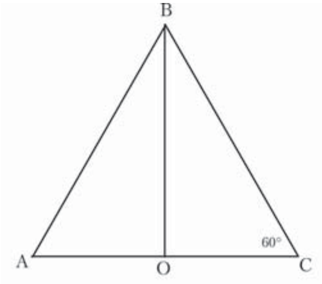


Рис. 59

Задача 154. Определить объем куба, если полная поверхность его равна 96.

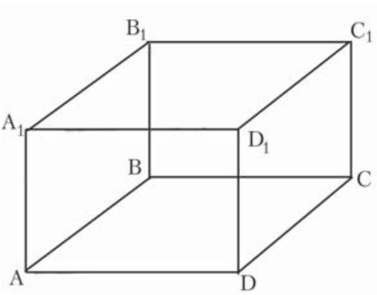


Рис. 60

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 60). Обозначим ребро куба — а, тогда, учитывая формулы 25, 29 (в 3.1), запишем: $S_п = 6a^2 = 96 \Rightarrow$ r, $a = 4$.

2. Объем куба $V = a^3 = 64$.

$\boxed{64}$

Задача 155. Какова высота конуса, боковая поверхность которого в 3 раза больше площади основания, если металлический шар радиуса $R = 2/\sqrt[3]{4}$ перелит в конус?

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 61). По условию задачи: R — радиус шара, r = OC — радиус основания конуса, l = AB = BC — его образующая, H = BO — высота конуса.

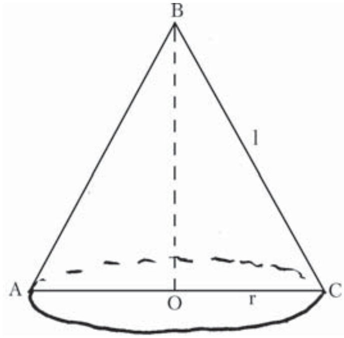


Рис. 61

2. $V_{шара} = V_{кон}$, $S_{бок.кон} = 3S_{осн.кон}$. Откуда с учетом формул 38, 40, 33 (в 3.1)

$$\frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H \Rightarrow r^2 H = 4R^3,$$

$$\pi r l = 3\pi r^2 \Rightarrow l = 3r.$$

3. Из ΔBOC: $H = \sqrt{l^2 - r^2} = r\sqrt{8}$,

$$r = \frac{H}{\sqrt{8}} \text{ и } \frac{H^2}{8} \cdot 8 = 4R^3 \Rightarrow H = 2\sqrt[3]{4} \cdot R = 4.$$

$\boxed{4}$

Задача 156. Найти длину образующей цилиндра, если площадь боковой поверхности равна 3π, а площадь сечения цилиндра, отстоящего на $\sqrt{2}$ от его оси, равна 1.

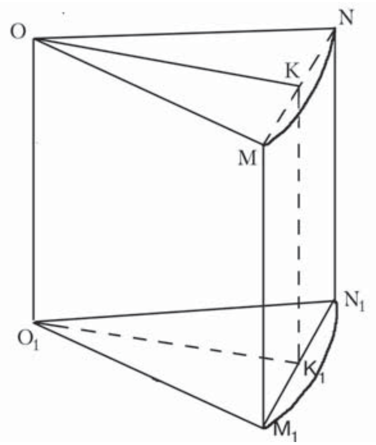


Рис. 62

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 62). Обозначим: $OO_1 = MM_1 = NN_1 = H$, $OK \perp MN$, $OK = O_1K_1 = \sqrt{2}$, $OM = O_1M_1 = ON = O_1N_1 = R$ — радиус цилиндра.

2. Сечение цилиндра, проведенное на расстоянии $OK = O_1K_1 = \sqrt{2}$ от его оси, представляет собой прямоугольник, площадь которого $S = 1 = MN \cdot H$, а $S_{бок} = 2\pi RH = 3\pi \Rightarrow RH = 1{,}5 \Rightarrow$

$H = 1 : MH$.

3. Величину MN найдем из ΔOMN:

$$MK = 0{,}5MN = \sqrt{R^2 - OK^2} = \sqrt{R^2 - 2}.$$

4. Решим систему уравнений: RH = 1,5, $2H \cdot \sqrt{R^2 - 2} = 1$.
Поделив их почленно, получим

$$\frac{R}{\sqrt{R^2-2}} = 3 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow R = 1{,}5.$$

5. Окончательно: H = 1,5: R = 1.

$\boxed{1}$

Задача 157. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами: $\sqrt{90}$, $\sqrt{90}$ и 6, боковые ребра пирамиды равны 13. Найти объем пирамиды.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 63). Пусть H = SO — высота пирамиды. Из равенства боковых ребер следует, что равны AO, BO, CO, т.е. т. O — центр описанной около ΔABC окружности. Найдем высоту из ΔASO по теореме Пифагора:

$$AO^2 + H^2 = SA^2 \Rightarrow R^2 + H^2 = 169.$$

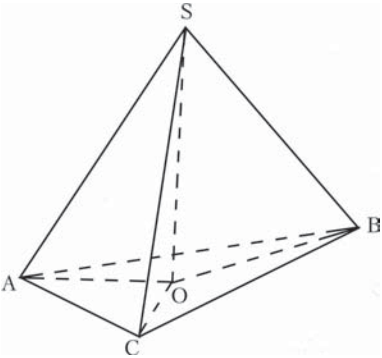


Рис. 63

2. Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона (формула 5 в 3.1): S = 27. По одной из формул 5(в 3.1) найдем радиус описанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{90} \cdot \sqrt{90} \cdot 6}{4 \cdot 27} = 5.$$

3. Тогда $H = \sqrt{169 - 25} = 12$ и объем пирамиды по формуле 30 (из 3.1) равен

$$V = \frac{1}{3} 12 \cdot 27 = 108.$$

$\boxed{108}$

Задача 158. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом 90°. Найти высоту цилиндра, если его боковая поверхность равна 4π.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 64). По условию AC⊥BD, AB — высота цилиндра, $AO_1 = O_1D$ — радиусы.

2. По формуле 32 (в 3.1)

$S_{бок} = 2\pi \cdot O_1D \cdot AB = 4\pi \Rightarrow O_1D \cdot AB = 2$.

3. Из условия задачи следует, что прямоугольник ABCD — квадрат, откуда

$AB = AD \Rightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AB = 2$; AB = 2.

$\boxed{2}$

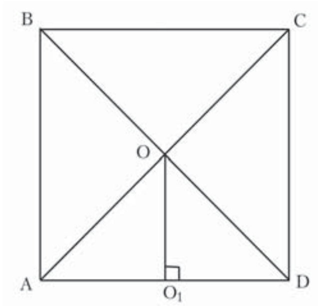


Рис. 64

Задача 159. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если угол между его диагональю и боковой гранью составляет 30°, а в основании лежит квадрат со стороной $2\sqrt{2}$.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 65). Обозначим AB = BC = CD = =AD = $2\sqrt{2}$, B_1D — диагональ параллелепипеда. Так как $AD \perp AA_1B_1B$, то AB_1 — проекция DB_1 на эту грань и $\angle DB_1A = 30°$.

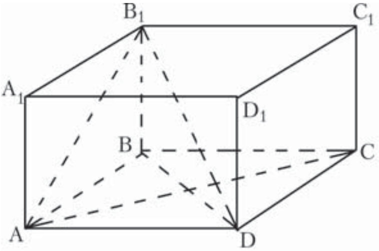


Рис. 65

2. Объем параллелепипеда по формуле 29 (в 3.1)

$$V = AA_1 \cdot AB \cdot AD = AA_1 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8AA_1.$$

3. Из ΔAB_1D:

$$AB_1 = AD \cdot ctg30° = AD \cdot \sqrt{3}.$$

Из ΔAA_1B_1:

$$AA_1 = \sqrt{AB_1^2 - A_1B_1^2} =$$

$$= \sqrt{3\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 4.$$

4. Окончательно: $V = 8AA_1 = 8 \cdot 4 = 32$.

$\boxed{32}$

Задача 160. Определить площадь поверхности шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, у которой высота равна 9, а двугранный угол при основании 60°.

Решение. 1. Строим чертеж (рис. 66). ΔMSN — сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию. Обозначим: SO = 9 — вы-

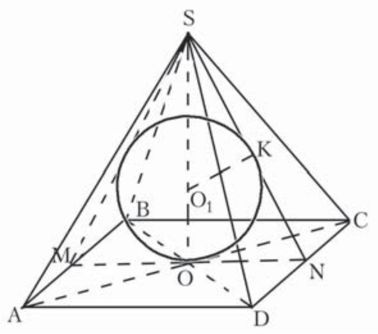


Рис. 66

сота пирамиды, $\angle SNO = 60°$, $O_1O = O_1K = r$ — радиусы вписанного в пирамиду шара (совпадают с радиусом вписанного круга в ΔMSN).

2. Из ΔSO_1K:

$$O_1K = O_1S \cdot \sin 30^{o} \Rightarrow r = (9 - r) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow r = 3.$$

3. По формуле 35 (из 3.1)

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = 4 \cdot 9 \cdot \pi = 36\pi.$$

$\boxed{36\pi}$